СИГНАЛЫ С МАКСИМАЛЬНОЙ И МИНИМАЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТЯМИ ОБНАРУЖЕНИЯ

В. А. Котельников

Радиотехника и электроника
1959, № 3, с. 354–358

В статье показывается, для каких сигналов вероятность их обнаружения при помощи оптимального приемника максимальна и для каких минимальна. Даются оценки этих вероятностей.

1. Целью данной работы являлось выяснение форм сигнала, обеспечивающих максимальную и минимальную вероятности правильного обнаружения при приеме на оптимальный приемник, и величин этих вероятностей.

Полученные экстремальные значения позволяют судить о пределах, в которых формы сигнала могут влиять на вероятность его обнаружения.

Пусть принимаемый сигнал может иметь одну из следующих форм:

$$S_1(t),\ S_2(t),\ \ldots,\ S_m(t) \tag{1}$$

и

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m$$

— априорные вероятности появления этих форм $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1\right)$.

Пусть далее все формы сигнала могут быть представлены выражениями

$$S_k(t) = \sum_{i=1}^{n} s_{ki} B_i(t), \tag{2}$$

где $B_i(t)$ — некоторые взаимно ортогональные в интервале $-T/2, +T/2$ функции, дли которых $\dfrac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{+T/2} B_i^2(t)dt = 1$.

Часто сигналы, лежащие в интервале времени $-T/2,\ +T/2$, представляют как сумму синусоидальных колебаний с частотами n/T (n — целое число), лежащими в интервале частот шириной Δf. В этом случае в выражении (2) $n = 2\Delta f T$.

Формы сигнала (2) можно представить векторами или точками в n-мерном пространстве с координатами s_{ki}. При этом длины векторов или расстояния точек от начала координат будут пропорциональны энергиям колебаний.

Обозначим приходящее колебание, состоящее из суммы сигнала и помехи или из одной помехи, через $X(t)$. Пусть оно также может быть записано в форме (2) и представлено вектором или точкой в n-мерном пространстве.

Объединим точки пространства, соответствующие тем значениям $X(t)$, при которых приемник будет указывать на наличие сигнала (все равно какой формы), в область S и остальные — в область 0. Эти области определяют приемник.

Будем характеризовать качество приема вероятностью правильного обнаружения сигнала D и вероятностью ложного обнаружения F. Под D будем подразумевать вероятность того, что при посылке сигнала в виде одной из форм (1) приемник правильно отметит его наличие (без указания, какая из форм сигнала поступила) или, что то же самое, вероятность того, что точка, соответствующая колебанию $X(t) = S_k(t) + N(t)$, где $N(t)$ — колебание помехи, $k = 1, \ldots, m$, попадет в область S.

Под F подразумеваем вероятность того, что приемник из-за воздействия помехи ложно отметит наличие сигнала, когда он не посылался, или вероятность того, что точка, соответствующая колебанию $X(t) = N(t)$, попадет в область S. D и F зависят от форм сигнала, помехи и конфигурации областей S и 0, т. е. приемника.

При заданных статистически сигнале и помехе, как известно, всегда можно выбрать оптимальный приемник, который при данном F даст максимально возможное D, которое мы будем обозначать D_0.

2. Под сигналом с максимальной вероятностью обнаружения будем понимать сигнал, обеспечивающий при заданном F максимальное D_0 при условии, что энергия сигнала не может превосходить некоторой величины A.

Для отыскания такого сигнала рассмотрим ряд случаев.

Случай I. Сигнал определяется выражениями (1). Приемник, оптимальный для этого сигнала, и обеспечивает заданное F.

Будем иметь

$$D = D_0' = \sum_{k=1}^{m} D_k p_k,$$

где D_k — вероятность того, что точка, соответствующая $X(t) = S_k(t) + N(t)$, попадет в область S.

Случай II. Сигнал может принимать лишь одну первую форму $S_1(t)$ из совокупности (1). При этом для определенности полагаем, что $D_1 \geqslant D_k$ $(k = 2, \ldots, m)$. Приемник тот же, что в случае I. Тогда будем иметь F то же, что и в случае I и

$$D = D'' = D_1 = \sum_{k=1}^{m} D_1 p_k \geqslant \sum_{k=1}^{m} D_k p_k = D'_0,$$

так как $\sum\limits_{k=1}^{m} p_k = 1$.

Случай III. Сигнал тот же, что в случае II, но приемник, в отличие от предыдущего случая, оптимален для этого сигнала. В этом случае при том же F получаем

$$D = D'''_0 > D'' \geqslant D'_0,$$

т. е. вероятность правильного обнаружения сигнала, принимающего лишь одну форму $S_1(t)$, всегда больше, чем сигнала, могущего принимать несколько форм $S_1(t), \ldots, S_m(t)$, если в обоих случаях применяется оптимальный приемник.

Если помеха имеет вид белого шума, то D'''_0 для сигнала, имеющего одну форму, определяется только его энергией и не зависит от других его параметров. Причем, чем больше энергия, тем больше будет D'''_0 при том же F [1].

Таким образом, максимальную вероятность правильного обнаружения на оптимальный приемник будет иметь сигнал, имеющий только одну форму, причем при помехе в виде белого шума форма сигнала безразлична, лишь бы сигнал имел максимально дозволенную энергию A.

3. Под сигналом с минимальной вероятностью правильного обнаружения будем понимать сигнал, для которого при заданном F величина D_0 будет минимальной при условии, что энергия сигнала не меньше A.

Рассмотрим опять ряд случаев, считая всюду, что помеха является белым шумом.

Случай I. Все формы сигнала равновероятны, их число в пределе бесконечно и они равномерно заполняют поверхность шара с центром в начале координат и радиусом, соответствующим минимально дозволенной энергии A. Такой сигнал мы назовем шаровым.

Как известно, для всех бесконечно малых объемов, расположенных на границе областей S и 0 оптимального приемника, отношение P_{S+N}/P_N должно быть одинаковым [1]. Здесь P_{S+N} — вероятность попадания в бесконечно малый объем точки, соответствующей колебанию, $X(t) = S_k(t) + N(t)$, $k = 1, \ldots, m$, и P_N — точки, соответствующей колебанию $X(t) = N(t)$.

Поскольку для белого шума и выбранного сигнала все направления равнозначны, очевидно, отношение P_{S+N}/P_N может зависеть только от расстояния данного бесконечно малого объема от начала координат, и границей между областями S и 0 будет поверхность шара с центром в начале координат. Более подробное рассмотрение показывает, что это действительно так и что область S должна лежать вне, а область 0 — внутри этого шара. Радиус шара определяется величиной F.

Такой приемник может быть назван «энергетическим», поскольку он должен отмечать наличие сигнала тогда и только тогда, когда энергия приходящего колебания $X(t)$ будет больше энергии, соответствующей радиусу шара. При энергетическом приемнике D_k — вероятность того, что точка, соответствующая колебанию $S_k(t) + N(t)$, попадет в область S — будет определяться лишь энергией формы $S_k(t)$, которую мы обозначим через A_k. Это следует из равнозначности всех направлений в данном случае. Поэтому можно записать $D_k = \Phi(A_k)$.

Для данного случая, поскольку все $A_k = A$, $D_k = \Phi(A)$, и будем иметь

$$D = D_0' = \sum_{i=1}^{m} D_k p_k = \Phi(A).$$

Случай II. Сигнал — любой нешаровой, соответствующий выражению (1) и удовлетворяющий условию $A_k \geqslant A$. Приемник — оптимальный для этого сигнала. Помеха — белый шум. Пусть для этого случая при заданном F

$$D = D_0''.$$

Случай III. Сигнал тот же, что и в случае II, а приемник — «энергетический», соответствующий случаю I. Если данный сигнал будет отличен от шарового, принятого в случае I, этот приемник не будет оптимальным для данного случая, и мы будем иметь при данном F

$$D = D''' = \sum_{k=1}^{m} D_k p_k = \sum_{k=1}^{m} \Phi(A_k) p_k < D_0''.$$

Далее легко видеть, что $\Phi(A_k)$ — монотонно возрастающая функция A_k. Действительно, чем больше A_k, т. е. чем дальше будет отстоять точка сигнала $S_k(t)$ от начала координат, тем больше вероятность того, что колебание $S_k(t) + N(t)$ не попадет в шар с центром в начале координат, т. е. в область 0 «энергетического» приемника. Отсюда следует, что

$$D''' = \sum_{i=1}^{m} \Phi(A_k) p_k \geqslant \sum_{k=1}^{m} \Phi(A) p_k = \Phi(A),$$

так как $\Phi(A_k) \geqslant \Phi(A)$, поскольку $A_k \geqslant A$.

Таким образом, $D_0'' > D''' \geqslant \Phi(A) = D_0'$. Поэтому любой нешаровой сигнал с $A_k \geqslant A$ будет иметь большую вероятность правильного обнаружения на свой оптимальный приемник, чем сигнал шаровой с энергией A.

Другими словами, шаровой сигнал является сигналом с минимальной вероятностью правильного обнаружения. Шаровые сигналы могут быть получены из случайных реализаций белого шума, если их нормировать так, чтобы энергия сигнала была всегда равна одной и той же величине.

4. В заключение приведем выражения D_0 и F для сигналов с наибольшей и наименьшей вероятностями обнаружения.

Для сигналов с одной формой границей между областями S и 0, как известно, будет плоскость, перпендикулярная вектору соответствующего сигнала. Расстояние ее от начала координат определяется выбранной величиной F. Для F и D_0 справедливы выражения [1]

$$F = V(\beta), \tag{3}$$

$$D_0 = V(\beta - \gamma), \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} V(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\beta}^{\infty} e^{-z^2/2} dz; \\ \gamma = \sqrt{\frac{2A}{\sigma^2}}, \end{gathered} \tag{5}$$

σ^2 — мощность помехи, приходящаяся на единицу полосы частот; β — некоторый параметр.

Из (3) по F определяется β и затем для данного β и γ по (4) определяется D_0. Чем больше γ, тем при данном F больше D_0.

Для шарового сигнала, как говорилось, границей между областями S и 0 оптимального приемника является поверхность шара, радиус которого зависит от выбора F.

Колебание помехи, записанное в форме (2), согласно [2], будет

$$N(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2T}} \sum_{i=1}^{n} \theta_i B_i(t),$$

где θ_i — нормальные взаимно независимые случайные величины с дисперсией, равной единице, и средним значением, равным нулю.

Отсюда вероятность F того, что точка помехи выйдет за шар радиуса R, будет вероятностью выполнения неравенства

$$\int\limits_{-T/2}^{+T/2} N^2(t) dt = \frac{\sigma^2}{2T} \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 > R^2.$$

Эта вероятность обусловливается известным, так называемым χ^2-распределением (см., например, [3]). При больших n можно оценить эту вероятность приближенно, применяя предельную теорему о сумме независимых случайных величин. Получим

$$\frac{\sigma^2}{2T} \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 \simeq \frac{\sigma^2}{2T} \left(\sqrt{2n}\, \theta + n \right),$$

где θ — опять нормальная случайная величина. Отсюда

$$F = P\left[\frac{\sigma^2}{2T}\left(\sqrt{2n}\,\theta + n\right) > R^2\right] = P(\theta > \beta) = V(\beta), \qquad (6)$$

где

$$\beta = \frac{R^2 - \dfrac{\sigma^2 n}{2T}}{\dfrac{\sigma\sqrt{2n}}{2T}}.$$

Вероятность D_k того, что точка $S_k(t) + N(t)$ попадет в область S, будет

$$\int\limits_{-T/2}^{+T/2} [N(t) + S_k(t)]^2 dt = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2T}}\theta_i + s_{ki}\right)^2 > R^2;$$

или, применяя при достаточно большом n предельную теорему о сумме независимых случайных величин, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2T}}\theta_i + s_{ki}\right)^2 \simeq \sqrt{n\frac{\sigma^4}{2T^2} + \frac{2\sigma^2}{T^2}A\theta} + n\frac{\sigma^2}{2T} + \frac{A}{T} > R^2,$$

где $A = T\sum\limits_{i=1}^{n} s_{ki}^2$ — энергия сигнала.

Отсюда

$$D_0 = D_k = P\left[\sqrt{n\frac{\sigma^2}{2T^2} + \frac{2\sigma^2}{T^2}A\theta} + n\frac{\sigma^2}{2T} + \frac{A}{T} > R^2\right]$$

или

$$D_0 = D_k = V\left(\frac{\beta - \gamma}{\sqrt{1 + \gamma\sqrt{\dfrac{8}{n}}}}\right), \qquad (7)$$

где

$$\gamma = \frac{\sqrt{2}\,A}{\sigma^2\sqrt{n}}. \qquad (8)$$

При большом n, когда $\gamma\sqrt{\dfrac{8}{n}} \ll 1$, структура выражения (7) та же, что и (4), только значение γ будет иным.

Сравнивая (8) с (5) для этого случая, получим, что при одинаковых F и D_0 отношение энергии сигнала с минимальной вероятностью $A_{\text{мин}}$ обнаружения и максимальной вероятностью обнаружения $A_{\text{макс}}$ равно

$$\frac{A_{\text{мин}}}{A_{\text{макс}}} = \frac{\sqrt{2n}}{\gamma}.$$

Если взять, например, $F = 10^{-6}$, $D = 0{,}5$, то, на основании (3) и (4), $\gamma = 4{,}7$, и при $n = 10^4$ получим $A_{\text{мин}}/A_{\text{макс}} = 30$.

Литература

1. *W. W. Peterson, T. G. Birdsall, W. C. Fox*, IRE Trans., 1954, PGIT-4, sept.; p. 171–212.
2. *В. А. Котельников*, Теория потенциальной помехоустойчивости, ГЭИ, 1956, гл. 2.
3. *Г. Крамер*, Математические методы статистики, ИЛ, 1948, гл. 18 и табл. III.